Un corrigé du sujet 1990, Agrégation Externe, Mathématiques Générales.

I.A.

I.A.1.a. Il est clair que $(x \mid f_u(y)) = (x \mid u)(y \mid u) = (f_u(x) \mid y)$ pour tous $(x, y) \in E$ donc f_u est bien symétrique.
De plus, on a $(x \mid f_u(x)) = (u \mid x)^2 \geqslant 0$ donc f_u est aussi positif.

I.A.1.b. $\operatorname{Im} f_u \subset < u >$ et $\operatorname{Im} f_u = \{0\} \iff u = 0$ donc $\operatorname{rg} f_u = 1$ si $u \neq 0$ et $\operatorname{rg} f_0 = 0$.

I.A.1.c. C'est un résultat classique que la projection orthogonale p_u sur la droite vectorielle engendrée par u est caractérisée $p_u(x) = \frac{(u|x)}{\|u\|^2} u$ donc si $\|u\| = 1$, on a $f_u = p_u$: c'est la projection orthogonale sur $< u >$.

I.A.1.d. Si u^* est la forme linéaire $x \longmapsto (u \mid x)$, (de matrice U^* dans la base B), et si g_u est l'application linéaire $g_u \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ \lambda & \longmapsto & \lambda u \end{array}$ il est clair que $f_u = g_u \circ u^*$, or la matrice de g_u est clairement U et donc la matrice de f_u est bien $U\,U^*$.

I.A.2. D'après **I.A**.1.b, si $u = 0$ ou $v = 0$, il est clair que $uu^* = vv^* \iff u = v = 0$. Si $u \neq 0$, $uu^* = vv^* \Longrightarrow < u > = < v > = \operatorname{Im} uu^* = \operatorname{Im} vv^*$, donc $v = \lambda u$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mais pour u, on a

$$uu^*(u) = f_u(u) = \|u\|^2 u = vv^*(u) = f_v(u) = (u \mid v)v = (u \mid \lambda u)\lambda u = \lambda^2 uu^*(u)$$

donc $\lambda^2 = 1$ puisque $u \neq 0$. On a montré que $uu^* = vv^* \Longrightarrow u = \pm v$.
Réciproquement, il est clair que si $u = \pm v$, on a $uu^* = vv^*$ donc

$$uu^* = vv^* \iff u = \pm v$$

I.A.3. Si f est symétrique, f est diagonalisable dans une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$. Cela signifie que dans cette base orthonormale, la matrice de f est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et donc pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$. Or, la base étant orthonormale, pour tout i, $x_i e_i$ est le projeté orthogonal de x sur $< e_i >$, c'est-à-dire, d'après **I.A**.1.c., qu'on a $x_i e_i = e_i e_i^*(x)$.
On a donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*(x)$, ceci pour tout x, donc

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*$$

Les λ_i sont par construction les valeurs propres de f et les e_i sont un système de vecteurs propres deux à deux orthogonaux.
f est positive [resp. définie positive] si et seulement si tous les λ_i sont positifs ou nuls [resp. strictement positifs] comme on s'en aperçoit aisément en écrivant que $(x \mid f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

I.A.4. D'après ce qu'on vient de voir, si $\forall x \in E$, $(x \mid f(x)) = 0$, alors, en écrivant cette égalité en particulier pour chaque e_i, on obtient que tous les λ_i sont nuls donc $f = 0$. La réciproque est évidente.

I.A.5. Puisque f est positive, tous les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$, donc si $(x \mid f(x)) = 0$, c'est que pour tout i, on a $\lambda_i x_i^2 = 0$, et donc pour tout i, on a $\lambda_i = 0$ ou $x_i = 0$, par conséquent $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i = 0$.
(Réciproque évidente).

I.A.6. Si f est positive, il est clair que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$ pour $u_i = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$, et la réciproque est évidente (une application uu^* est clairement symétrique positive, et une somme d'endomorphismes symétriques positifs est clairement symétrique positive).

I.B.

I.B.1.a. $\forall x$, on a $\|f(x)\|^2 = (x \mid f^*f(x)) \leqslant \|x\|\ \|f^*f(x)\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Or par définition de la norme de l'application linéaire f^*, on a
$\|f^*f(x)\| \leqslant \|f^*\|\ \|f(x)\|$.
Donc pour tous les $x \notin \operatorname{Ker} f$, on en déduit en simplifiant par $\|f(x)\| \neq 0$

$$\|f(x)\| \leqslant \|f^*\|\ \|x\|$$

(le résultat est trivial pour $x \in \operatorname{Ker} f$).

I.B.1.b. La boule unité étant compacte dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe x tel que $\|x\| = 1$ et tel que $\|f(x)\| = \|f\|$. Pour cet x, l'inégalité obtenue à la question précédente permet d'écrire $\|f\| \leqslant \|f^*\|$.
On peut ensuite appliquer ceci à f^*, et on obtient $\|f^*\| \leqslant \|f^{**}\|$. Mais comme $f = f^{**}$, on en déduit que $\|f\| = \|f^*\|$.

I.B.2.a. Pour tous $x, y \in E$, on a $(x \mid f^*f(y)) = (f(x) \mid f(y)) = (f^*f(x) \mid y)$ donc f^*f est symétrique.
De plus, pour tout $x \in E$, $(x \mid f^*f(x)) = \|f(x)\|^2 \geqslant 0$, donc f^*f est positive.

I.B.2.b. $\mathrm{id} - f^*f$ est symétrique car $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Cet endomorphisme est positif si et seulement si

$$\forall x \in E,\ (x \mid (\mathrm{id} - f^*f)(x)) \geqslant 0 \iff \|x\|^2 \geqslant \|f(x)\|^2\ (\forall x) \iff \|f\| \leqslant 1$$

ce qui caractérise les éléments de $\mathscr{B}(E)$.

I.B.3.a. Dans un sens, c'est une conséquence immédiate de la compacité de la boule unité dans un espace vectoriel de dimension finie : il existe x_0 tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|f\| = \|f(x_0)\|$, donc $\|f\| = 1 \Longrightarrow \|f(x_0)\| = 1 = \|x_0\| \Longrightarrow x_0 \in E_f$; réciproquement, si $\exists x_0 \in E_f \setminus \{0\}$, on a $\|x_0\| = \|f(x_0)\| \leqslant \|f\|\,\|x_0\|$, donc $\|f\| \geqslant 1$ et $\|f\| = 1$ puisque $f \in \mathscr{B}(E)$.

I.B.3.b.
$x \in E_f \iff \|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = (x \mid f^*f(x)) \iff (x \mid (\mathrm{id} - f^*f)(x)) = 0 \iff x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{id} - f^*f)$
puisque $\mathrm{id} - f^*f$ est symétrique positive d'après **I.B**.2.b. et en appliquant **I.A**.5.
La deuxième égalité s'en déduit puisque si $\|f\| \leqslant 1$, on a aussi $\|f^*\| \leqslant 1$ d'après **I.B**.1.b.

I.B.3.c. Soit $y = f(x) \in f(E_f)$, avec $x \in E_f$. On a donc $f^*f(x) = x$ et donc $f(x) = ff^*f(x)$, c'est-à-dire $y = ff^*(y)$ et $y \in {E_f}^*$. On a montré que $f(E_f) \subset {E_f}^*$. Grâce à la symétrie des rôles de f et f^*, on montre exactement de la même manière que $f^*({E_f}^*) \subset E_f$. On peut donc écrire

$$f^*f(E_f) \subset f^*({E_f}^*) \subset E_f.$$

Mais pour tout $x \in E_f$, on a d'après **I.B**.3.b. $f^*f(x) = x$, donc $f^*f(E_f) = E_f$ et on a

$$E_f \subset f^*({E_f}^*) \subset E_f \qquad \text{donc} \qquad E_f = f^*({E_f}^*)$$

On en déduit $ff^*({E_f}^*) = f(E_f) \subset {E_f}^*$ et puisque $ff^*({E_f}^*) = {E_f}^*$, on a aussi $f(E_f) = {E_f}^*$.
En utilisant que pour tout sous-espace vectoriel V, $\dim(f(V)) \leqslant \dim(V)$, on a
$\dim({E_f}^*) = \dim(f(E_f)) \leqslant \dim(E_f) = \dim(f^*({E_f}^*) \leqslant \dim({E_f}^*)$ d'où l'égalité des dimensions demandée.

I.B.4. L'égalité des dimensions qu'on vient de démontrer prouve (d'après **I.B**.3.b.) que $\mathrm{id} - ff^*$ et $\mathrm{id} - f^*f$ ont le même rang, lorsque f ou f^* (donc les deux, d'après **I.B**.1.b.) est dans $\mathscr{B}(E)$. Cela suffit à établir que $f \in \mathscr{C}(E) \iff f^* \in \mathscr{C}(E)$.
De plus, les valeurs propres de f coïncident avec celles de f^*, donc $\rho(f) = \rho(f^*)$, donc $f \in \mathscr{C}_0(E) \iff f^* \in \mathscr{C}_0(E)$. (On a d'ailleurs aussi $f \in \mathscr{B}_0(E) \iff f^* \in \mathscr{B}_0(E)$.)

I.B.5. i.$\Longrightarrow$ii.
Si $f \in \mathscr{C}(E)$, on a entre autres $f \in \mathscr{B}(E)$ et donc d'après **I.B**.2.b. et **I.A**.6. il existe a priori n vecteurs u_i (on a vu qu'on pouvait les prendre 2 à 2 orthogonaux) tels que $\mathrm{id} - f^*f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$. On a vu que $\mathrm{Im}(u_i u_i^*) =< u_i >$, et ces vecteurs étant 2 à 2 orthogonaux, $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - f^*f) =< u_1, \dots, u_n >$. L'hypothèse que $f \in \mathscr{C}(E)$ donc que $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{id} - f^*f)) \leqslant 1$ nous assure donc que les vecteurs u_i qui sont 2 à 2 orthogonaux sont presque tous nuls sauf peut-être un seul d'entre eux. Si u est ce vecteur non nul (ou $u = 0$ si tous sont nuls), on a clairement $\mathrm{id} - f^*f = uu^*$.

ii.$\Longrightarrow$iii.
Si $\mathrm{id} - f^*f = uu^*$, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (x \mid x - f^*f(x)) = (x \mid uu^*(x)) = (x \mid (u \mid x)u) = (u \mid x)^2$$

iii.$\Longrightarrow$i.
Si $\forall x \in E,\ \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u \mid x)^2 \geqslant 0$, on peut affirmer que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout x, donc $\|f\| \leqslant 1$ et $f \in \mathscr{B}(E)$. De plus, on a

$$0 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2 - (u \mid x)^2 = (x \mid (\mathrm{id} - f^*f - uu^*)(x)) \quad \forall x \in E$$

D'après **I.A**.4. on en déduit que $\mathrm{id} - f^*f = uu^*$, donc d'après **I.A**.1.b. $\mathrm{rg}(\mathrm{id} - f^*f) \leqslant 1$ et $f \in \mathscr{C}(E)$.

I.C.
Il est classique que $\chi_C = P$ (démonstration par récurrence, par exemple en développant le déterminant par rapport à la première ligne).
Le polynôme minimal de C est aussi P, car si n est le degré de P, si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il est clair que $C^k(e_1) = e_{k+1}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, donc pour tout polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k T^k$ de degré $\leqslant n-1$, si on a $Q(C) = 0$, en l'appliquant à e_1, on en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k e_{k+1} = 0$, donc tous les q_k sont nuls. Aucun polynôme non nul de degré $< n$ n'annule

C, ce qui prouve que $\mu_C = \chi_C = P$. (μ_C désigne le polynôme minimal de C. On a identifié C à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'il définit canoniquement.)

II.

II.1.Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$, on a $I_n - A^*A = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2-\nu^2 & \mu\nu \\ \mu\nu & 1-\mu^2 \end{pmatrix}$ et le fait que $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ implique que le déterminant de cette matrice est nul, ce qui s'écrit justement $\nu^2 = (1-\lambda^2)(1-\mu^2)$.
Les valeurs propres de A sont λ et ν, et le fait que $\|A\| \leqslant 1$ implique que $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\mu| \leqslant 1$ (il suffit de considérer des vecteurs propres). Donc il existe deux réels α et β tels que $\lambda = \cos\alpha$ et $\mu = \cos\beta$. L'égalité qu'on vient d'obtenir s'écrit donc $\nu^2 = \sin^2\alpha\ \sin^2\beta$, et quitte à changer le signe de α ou de β, on est sûr de pouvoir écrire $\nu = -\sin\alpha\ \sin\beta$.
Réciproquement, une matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ est telle que

$$\begin{aligned}
I_2 - A^*A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\ \sin\beta \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\ \sin^2\beta & -\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta \\ -\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta & \cos^2\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ \sin^2\beta & \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta \\ \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta & 1-\cos^2\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin^2\alpha\ \cos^2\beta & \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta \\ \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\ \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= UU^* \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ (d'après **I.B**.5.ii) et on a trouvé un vecteur U qui convient.

II.2. Si $I_n - A^*A = UU^*$, c'est que $A \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, donc $\|A\| \leqslant 1$ et nécessairement $|a_{nn}| \leqslant 1$. On peut donc trouver $\theta_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_{nn} = \cos\theta_n$. L'égalité $I_n - A^*A = UU^*$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} - B^*B - CC^* & -a_{nn}C \\ -a_{nn}C^* & 1-a_{nn}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WW^* & b_nW \\ b_nW^* & b_n^2 \end{pmatrix}$$

D'où les conditions $a_{nn} = \cos\theta_n$, $b_n = \sin\theta_n$ (quitte à changer le signe de θ_n), ainsi que $-\cos\theta_n C = \sin\theta_n W$ et $I_{n-1} - B^*B - CC^* = WW^*$.
$\cos\theta_n$ et $\sin\theta_n$ n'étant pas simultanément nuls une des deux égalités suivantes a un sens :

$$V = -\frac{1}{\sin\theta_n}C \qquad V = \frac{1}{\cos\theta_n}W$$

et dans les deux cas, on déduit l'autre égalité de $-\cos\theta_n C = \sin\theta_n W$, donc on a trouvé V tel que $C = -\sin\theta_n V$ et $W = \cos\theta_n V$.
La dernière égalité s'écrit donc

$$I_{n-1} - B^*B - \sin^2\theta_n VV^* = \cos^2\theta_n VV^* \iff I_{n-1} - B^*B = VV^*$$

Réciproquement, si θ_n et V existent et vérifient les 5 égalités, en calculant $I_n - A^*A$ et UU^* on trouve facilement que ces deux matrices sont toutes 2 égales à $\begin{pmatrix} \cos^2\theta_n VV^* & \sin\theta_n\cos\theta_n V \\ \sin\theta_n\cos\theta_n V^* & \sin^2\theta_n \end{pmatrix}$.

II.3. Soit $\lambda_i = \cos\theta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les n valeurs propres imposées.
Le résultat de la question précédente décrit la manière d'augmenter d'une unité la dimension d'une matrice carrée répondant au problème posé. On peut procéder ainsi.

On construit la matrice $A = (a_{ij})$ en même temps que le vecteur $U = (u_i)$.

(*1ère étape*) :
$a_{11} := \cos(\theta_1)$; $u_1 := \sin(\theta_1)$

Faire pour k de 1 à $n-1$
($(k+1)^{\text{ème}}$ *étape : on a déjà calculé* a_{ij} *et* u_i *pour* $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant k$).
  $a_{k+1,k+1} := \cos\theta_{k+1}$; $u_{k+1} := \sin\theta_{k+1}$;
  Pour i de 1 à k faire
    $a_{k+1,i} := -\sin\theta_{k+1} * u_i$; $u_i := \cos\theta_{k+1} * u_i$;
  fin de faire (pour i) ;
fin de faire (pour k).

En appliquant cet algorithme pour les premières valeurs de n, on se rend compte qu'une matrice A est nécessairement de la forme
$a_{ii} = \cos\theta_i$; $a_{i+1,i} = -\sin\theta_i \sin\theta_{i+1}$; $a_{i+2,i} = -\sin\theta_i \cos\theta_{i+1} \sin\theta_{i+2}$; ...
$a_{j,i} = -\sin\theta_i \cos\theta_{i+1} \cos\theta_{i+2} \ldots \cos\theta_{j-1} \sin\theta_j$
Et de la même manière on s'aperçoit que U est nécessairement de la forme
$u_n = \sin\theta_n$; $u_{n-1} = \cos\theta_n \sin\theta_{n-1}$; $u_{n-2} = \cos\theta_n \cos\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2}$; ...
$u_i = \cos\theta_n \cos\theta_{n-1} \ldots \cos\theta_{i+1} \sin\theta_i$

Pour établir cette propriété, il suffit de raisonner par récurrence sur n, la propriété étant clairement vraie aux premiers ordres, et l'enchaînement est une conséquence immédiate de l'algorithme qu'on vient d'écrire.

III.
III.A.
III.A.1.a. On a vu que E_f est un noyau d'endomorphisme, donc un sous-espace vectoriel de E. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f^k)^{-1}(E_f)$ est aussi un sous-espace vectoriel et $F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (f^k)^{-1}(E_f)$ est un sous-espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels.

III.A.1.b. Si $x \in F$, il est clair que $f(x)$ est tel que $\forall k$, $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) \in E_f$ donc $f(x) \in F$, et on a établi que $f(F) \subset F$.
F est donc stable pour f, mais la restriction de f à F est clairement injective (soit $x \in F$, on a en particulier, $x \in f^0(E_f) = E_f$, donc $x \neq 0 \Longrightarrow \|x\| = \|f(x)\| \neq 0$) donc $\dim(f(F)) = \dim(F) < +\infty$ donc $F = f(F)$.

Puisque $f(F) = F$, $f^*(F) = f^*f(F)$. Or $F \subset E_f = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f^*f)$ (**I.B.**3.b.) donc $\forall x \in F$, on a $f^*f(x) = x$ et $f^*f(F) = F$, donc $f^*(F) = F$.

III.A.1.c. C'est un résultat classique que puisque F est stable par f^*, l'orthogonal $G = F^\perp$ de F est stable par f

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad (x \mid f(y)) = (f^*(x) \mid y) = 0 \quad (\text{puisque } f^*(x) \in F) \text{ donc } f(y) \in G = F^\perp$$

III.A.2.a. Les normes de F et G sont les normes induites par $\|\cdot\|$, donc pour tout $y \in G$ tel que $\|y\| = 1$, on a $\|\psi(y)\| = \|f(y)\| \leqslant \|f\| \leqslant 1$. On a donc $\|\psi\| = \sup_{\substack{y \in G \\ \|y\|=1}} \|\psi(y)\| \leqslant 1$ et $\psi \in \mathscr{B}(G)$.

III.A.2.b. Pour tout $x \in F$, on vient de voir que $f^* f(x) = x$, donc $\varphi^* \varphi(x) = x$, ce qui signifie $\varphi^* \varphi = \mathrm{id}_F$, donc $\varphi \in \mathscr{O}(F)$.
(autre méthode : $\forall (x, y) \in F^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (f(x) \mid f(y)) = (f^* f(x) \mid y) = (x \mid y)$ puisque $f^* f(x) = x$. On a prouvé que φ conserve le produit scalaire, donc $\varphi \in \mathscr{O}(F)$.)

III.A.2.c. Si $x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)$ sont tous dans E_f, et si $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x), f^p(x))$ forme une famille liée, c'est que le polynôme minimal de x pour l'endomorphisme f est de degré $\leqslant p$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x)$ appartient au sous-espace vectoriel $E_x = < x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x) > \subset E_f$, donc $x \in F$.
Si donc $x \notin F$, et si k est le plus petit entier naturel tel que $f^k(x) \notin E_f$, alors nécessairement la famille $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ est incluse dans E_f. Si $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x), f^k(x))$ était liée, on obtiendrait $x \in F$. Donc cette famille est libre. On en déduit que $k + 1 \leqslant n$, puisque n est la dimension de l'espace, c'est-à-dire le cardinal maximal d'une famille libre et que cette famille possède $k + 1$ éléments.
Puisque les $x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)$ sont tous dans E_f, on a

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|f^2(x)\| = \cdots = \|f^{k-1}(x)\| = \|f^k(x)\|$$

En revanche, puisque $f^k(x) \notin E_f$ (et puisque $\|f\| \leqslant 1$), on a

$$\|f^{k+1}(x)\| < \|f^k(x)\| = \|x\|$$

Et puisque $n \geqslant k + 1$ et $\|f\| \leqslant 1$, on a

$$\|f^n(x)\| \leqslant \|f^{k+1}(x)\| < \|x\|$$

III.A.2.d. Si $G \neq \{0\}$, l'ensemble des $x \in G$ tels que $\|x\| = 1$ forme un compact non vide de G, et ce sont tous des éléments qui n'appartiennent pas à F. On a donc pour tous ces x, d'après ce qui précède,

$$\|\psi^n(x)\| = \|f^n(x)\| < 1$$

Par compacité, $\|\psi^n\| = \sup\limits_{\substack{x \in G \\ \|x\|=1}} \|\psi^n(x)\|$ est atteint, il existe $x_0 \in G$ tel que $\|x_0\| = 1$ et tel que $\|\psi^n\| = \|\psi^n(x_0)\| < 1$. Puisqu'il existe n tel que $\|\psi^n\| < 1$, d'après le rappel admis, on a $\rho(\psi) < 1$. Il reste à étudier le cas où $G = \{0\}$, (ce qui correspond à $F = E$ et donc forcément $E_f = E$). Mais dans ce cas, on a convenu que $\rho(\psi) = 0$, donc on a dans tous les cas $\rho(\psi) < 1$ et $\psi \in \mathscr{B}_0(G)$.

III.A.3. i.$\Longrightarrow$iii. *(par contraposée)*
Si $F \neq \{0\}$, puisque $\varphi \in \mathscr{O}(F)$, pour tout $x \in F$, $\|f^n(x)\| = \|\varphi^n(x)\| = \|x\|$, et il existe des x non nuls dans E tels que la suite $(f^n(x))$ ne tend pas vers 0. La suite de fonction (f^n) ne tend donc pas vers l'endomorphisme nul, et d'après la caractérisation admise, $\rho(f) \geqslant 1$ et $f \notin \mathscr{B}_0(E)$.

iii.$\Longrightarrow$ii.
Si $F = \{0\}$, c'est que pour tous les x non nuls de E, on a $x \notin F$ et donc, d'après la question précédente, $\|f^n(x)\| < \|x\|$.
En particulier, grâce à la compacité de la sphère unité comme en 2.d., pour x_0 tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|f^n\| = \|f^n(x_0)\|$, on a $\|f^n(x_0)\| < 1$ et par conséquent $\|f^n\| < 1$.

ii.$\Longrightarrow$i.
D'après la caractérisation qu'on a admise, si $\|f^n\| < 1$, c'est que $\rho(f) < 1$ et donc $f \in \mathscr{B}_0(E)$.

III.B.

III.B.1.a. Montrons d'abord que $u \in (E_f)^\perp$.
On a vu en **I.B**.5. que pour cet u et pour tout $x \in E$, on a $(x \mid u)^2 = \|x\|^2 - \|f(x)\|^2$. Donc si $x \in E_f$, on a $\|x\| = \|f(x)\|$ donc $(u \mid x) = 0$.

Si on suppose que $x \in F$, on a donc $f^i(x) \in E_f$ pour $1 \leqslant i < n$, donc
$(x \mid u) = (f(x) \mid u) = \cdots = (f^{n-1}(x) \mid u) = 0$.

Réciproquement, si on suppose que $(x \mid u) = (f(x) \mid u) = \cdots = (f^{n-1}(x) \mid u) = 0$, on a pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 = (f^i(x) \mid u)^2 = \|f^i(x)\|^2 - \|f^{i+1}(x)\|^2$, donc
$\|x\| = \|f(x)\| = \cdots = \|f^{n-1}(x)\| = \|f^n(x)\|$, donc $\|f^n(x)\| = \|x\|$ et donc $x \in F$ (contraposée de **III.A**.2.c.).

III.B.1.b. Sachant que $f \in \mathscr{C}(E)$, f sera élément de $\mathscr{C}_0(E)$ si et seulement si $f \in \mathscr{B}_0(E)$, donc d'après **III.A**.3. si et seulement si $F = \{0\}$.
Or d'après la question précédente, F est exactement égal à $< u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-1}(u) >^\perp$, puisque $(f^i(x) \mid u) = (x \mid (f^i)^*(u)) = (x \mid (f^*)^i(u))$.
Donc $F = \{0\}$ si et seulement si $(u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-1}(u))$ est une partie génératrice de E, c'est-à-dire si et seulement si cette famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base.

III.B.2. Puisque $(u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-1}(u))$ est une base de E, donc $< u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-2}(u) >$ est un hyperplan de E (qu'on suppose de dimension $\geqslant 2$). Soit x un élément de l'orthogonal de cet hyperplan. Il vérifie : pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-2$,

$$0 = (x \mid (f^*)^i(u))^2 = (f^i(x) \mid u)^2 = \|f^i(x)\|^2 - \|f^{i+1}(x)\|^2$$

Donc on a bien $\|x\| = \|f(x)\| = \cdots = \|f^{n-1}(x)\|$. Cela permet d'affirmer que $\|f^k\| \geqslant 1$ pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ et on a déjà vu que $\|f^n\| < 1$ (**III.A**.3.).
Si $n = 1$, ce raisonnement s'applique encore sauf que la famille $(u, f^*(u), \ldots, (f^*)^{n-2}(u))$ étant vide, l'hyperplan qu'elle engendre est $\{0\}$. x est donc un élément quelconque non nul de E, et comme il n'y a aucun i entre 0 et $n-2$, on n'a aucune orthogonalité vérifiée, mais on a bien $\|x\| = \|x\|$. Le seul k entre 0 et $n-1$ étant 0, on a seulement à vérifier $\|f^0\| = \|\mathrm{id}\| = 1$, ce qui est trivial.

III.B.3. Soit $\|x\|$ non nul tel que $\|x\| = \|f^{n-1}(x)\|$ (la possibilité de choisir un tel x est assurée par la dimension finie, qui rend compacte la boule unité). Nécessairement, on a $\|x\| = \|f(x)\| = \cdots = \|f^{n-1}(x)\|$, donc pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n-2\}$, on a $f^k(x) \in E_f$. De plus on est sûr que $\|f^n(x)\| < \|x\| = \|f^{n-1}(x)\|$, donc $n-1$ est le plus petit entier naturel k tel que $f^k \notin E_f$. On peut donc appliquer le résultat du **III.A**.2.c. et on peut affirmer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E donc une base puisqu'elle a n éléments.
Il reste à prouver que f est un élément de $\mathscr{C}_0$. On sait déjà que $f \in \mathscr{B}$ (puisque $\|f\| = 1$) ; on sait aussi que $f \in \mathscr{B}_0$ puisque $\|f^n\| < 1$, et donc $\rho(f) < 1$ grâce à la propriété admise dans les rappels. Il reste à prouver que $f \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire que $\mathrm{rg}(\mathrm{id} - f^*f) \leqslant 1$. Or on a vu (**I.B**.3.b) que $E_f = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f^*f)$; et comme $\|x\| = \|f(x)\| = \cdots = \|f^{n-1}(x)\|$, on a, par définition de E_f : $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x)\} \subset E_f$; comme la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x))$ est libre (sous-famille de la base $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$), et qu'elle possède $n-1$ éléments, on est sûr que le sous-espace vectoriel $E_f = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f^*f)$ est de dimension au moins $n-1$, et donc, par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\mathrm{id} - f^*f) \leqslant 1$ et on a bien prouvé que $f \in \mathscr{C}$, donc $f \in \mathscr{C}_0$ puisque $\rho(f) < 1$.

III.C.

III.C.1. Soit x un vecteur non nul dont on a montré l'existence à la question **III.B**.2. c'est-à-dire tel que

$$\|x\| = \|f(x)\| = \cdots = \|f^{n-1}(x)\|$$

Puisque $\|f^n\| < 1$, on a $\|x\| > \|f^n(x)\|$. Soit $\delta = \|x\|^2 - \|f^n(x)\|^2 > 0$. Si on pose $\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, x$, il est clair que ce vecteur répond à la question. $\nu_1, \ldots, \nu_n$ est une base d'après **III.B**.3.
La matrice de f dans cette base est clairement une matrice compagnon C, dont le polynôme caractéristique est celui de f (il ne dépend pas de la base). Si le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f = T^n - a_{n-1}T^{n-1} - \cdots - a_1 T_1 - a_0$$

alors il est clair que la matrice de f dans la base $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ est exactement la matrice C compagnon de χ_f.

III.C.2.a. Soit X la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ dans une base orthonormale quelconque. Il est clair que

$$G(x_1, \ldots, x_n) = X^* X$$

Donc si N est la matrice formée par les coordonnées des ν_i dans une base orthonormale $\mathbf{e}$ de E, on a $\Omega = N^* N$.
N est donc la matrice de passage de la base $\mathbf{e}$ à la base $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Soit M la matrice de f dans la base $\mathbf{e}$. Puisque C est la matrice de f dans la base ν, on a $C = N^{-1}MN$ et $NC = MN$. D'où $C^*\Omega C = C^* N^* N C = (NC)^*(NC) = (MN)^*(MN)$.
Or MN est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(\nu_i)$ dans la base $\mathbf{e}$, donc $C^*\Omega C = (MN)^*(MN) = G(f(\nu_1), \ldots, f(\nu_n))$.

III.C.2.b. Calculons le terme général de la matrice $A = (a_{ij}) = \Omega - C^*\Omega C$ en utilisant l'identité $(a \mid b) = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$ et l'égalité iii. du I.B.5. qui fait intervenir un vecteur u tel que $\mathrm{id} - f^* f = uu^*$, à savoir $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = (u \mid x)^2$ pour tout x.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (\nu_i \mid \nu_j) - (f(\nu_i) \mid f(\nu_j)) \\ &= \frac{1}{2}\Big((\|\nu_i+\nu_j\|^2 - \|f(\nu_i+\nu_j)\|^2) - (\|\nu_i\| - \|f(\nu_i)\|^2) - (\|\nu_j\|^2 - \|f(\nu_j)\|^2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((u \mid \nu_i+\nu_j)^2 - (u \mid \nu_i)^2 - (u \mid \nu_j)^2\Big) \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a vu et par construction, tous les ν_i pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ sont dans E_f, qui est l'hyperplan vectoriel orthogonal de u, donc si i et j sont tous deux $\leqslant n-1$, il est clair que $a_{ij} = 0$. D'autre part, comme

$$(u \mid \nu_n)^2 = \|\nu_n\|^2 - \|f(\nu_n)\|^2 = \|f^{n-1}(\nu_1)\|^2 - \|f^n(\nu_1)\|^2 = \|\nu_1\|^2 - \|f^n(\nu_1)\|^2 = 1$$

et donc $|(u \mid \nu_n)| = 1$, on a pour $i \leqslant n-1$ et $j = n$,

$$a_{in} = \frac{\Big((u \mid \nu_i) + (u \mid \nu_n)\Big)^2 - (u \mid \nu_i)^2 - (u \mid \nu_n)^2}{2} = \frac{1}{2}\Big((0 \pm 1)^2 - 0^2 - 1^2\Big) = 0$$

Pour finir, en revenant à sa définition, de la même façon, on a $a_{nn} = \|\nu_n\|^2 - \|f(\nu_n)\|^2 = 1$
(Il est inutile de calculer les termes a_{nj} puisque A est clairement symétrique).
Finalement la matrice A a tous ses termes nuls à l'exception de $a_{nn} = 1$, elle est donc égale à $E_n E_n^*$.

IV.

IV.1. Puisque le polynôme caractéristique de C est P, et que toutes ses racines sont de module strictement inférieur à 1, on a $\rho(C) < 1$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m\| < 1$ (on a utilisé les résultats obtenus en **I.C**. et en **I.B**.1.b. ; on utilise aussi l'identification des matrices avec les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, et on utilise la norme euclidienne canonique).
Or si $A = C^*AC$, on a aussi $A = C^*(C^*AC)C$ et par récurrence immédiate, pour tout m entier positif $A = (C^*)^m A\, C^m$ et en particulier pour m tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m\| < 1$. Passant aux normes, on obtient $\|A\| \leqslant \|(C^*)^m\|\,\|A\|\,\|C^m\|$, donc $(1 - \|(C^*)^m\|\,\|C^m\|)\,\|A\| \leqslant 0$. Mais $(1 - \|(C^*)^m\|\,\|C^m\|) > 0$ et $\|A\| \geqslant 0$ donc cette inégalité n'est possible que si $\|A\| = 0$ et donc $A = 0$.

IV.2.a. On vient d'établir que l'endomorphisme ϕ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $A \longmapsto A - C^*AC$ est injectif et comme on est en dimension finie, il est bijectif, donc toute matrice B possède un unique antécédent A par ϕ, ce qui signifie qu'il existe une unique matrice A telle que $A - C^*AC = B$.

IV.2.b. On doit déjà établir la convergence de la série de matrices $\sum (C^*)^p BC^p$. En fait cette série est normalement convergente, car si m est un entier tel que $\|C^m\| = \|(C^*)^m\| = \theta < 1$, si $M = \max\limits_{0 \leqslant i < m} \|C^i\|$, pour tout $p = mq + r$ (division euclidienne de p par m : $0 \leqslant r < m$), on a $\|C^p\| = \|(C^m)^q C^r\| \leqslant \theta^q M \leqslant (\sqrt[m]{\theta})^{mq+r} \dfrac{M}{(\sqrt[m]{\theta})^r} \leqslant \dfrac{M}{\theta}\eta^p$ avec $0 \leqslant \eta = \sqrt[m]{\theta} < 1$ (en particulier, $\eta^r > \eta^m$, puisque $r < m$, et donc $\frac{1}{\eta^r} < \frac{1}{\eta^m} = \frac{1}{\theta}$). Donc le terme général de la série qu'on étudie est majoré en norme ainsi :

$$\|(C^*)^p B\, C^p\| \leqslant \left(\frac{M}{\theta}\right)^2 \|B\|(\eta^2)^p$$

et la série géométrique dont le terme général est le membre de gauche de cette inégalité est convergente puisque sa raison η^2 est strictement inférieure à 1.
Ensuite, il suffit de vérifier que cette matrice A est bien solution de l'équation qu'on étudie :

$$\begin{aligned} A - C^*AC &= \sum_{p=0}^{+\infty} (C^*)^p B\, C^p - C^* \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (C^*)^p B\, C^p \right) C \\ &= B + \sum_{p=1}^{+\infty} (C^*)^p B\, C^p - \sum_{p=0}^{+\infty} (C^*)^{p+1} B\, C^{p+1} \\ &= B + \sum_{p=1}^{+\infty} (C^*)^p B\, C^p - \sum_{p=1}^{+\infty} (C^*)^p B\, C^p = B \end{aligned}$$

IV.3.a. La restriction de l'endomorphisme ϕ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ introduit en **IV.**2.a. au sous-espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidemment stable dans ce sous-espace, et ϕ étant bijectif, l'unique antécédent G par ϕ d'un élément H de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Il reste à vérifier que G est positif sous l'hypothèse que H est positif.

Or on a vu que $G = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (C^*)^p H\, C^p$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$X^*GX = \sum_{p=0}^{+\infty}(C^pX)^*H\,(C^pX)$ qui est la somme d'une série à termes tous positifs puisque H est positif, donc $X^*GX \geqslant 0$.
On peut remarquer, ce qui nous servira à la question suivante, que la somme de cette série à termes positifs ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls.

IV.3.b. Si $X \in \operatorname{Ker} G$, on a justement la somme de la série qui est nulle, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(C^pX)^*H\,(C^pX) = 0$, ce qui implique (voir **I.A**.5.) que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $C^pX \in \operatorname{Ker} H$. On a établi i.$\Longrightarrow$ii.
La réciproque ii.$\Longrightarrow$i. est évidente en considérant cette même série.
ii.$\Longrightarrow$iii. est évident.
iii.$\Longrightarrow$ii. Puisque H est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, son polynôme minimal est de degré $\leqslant n$, et pour tout X, le sous-espace vectoriel engendré par les H^kX, $k \in \mathbb{N}$ est engendré par $(X, HX, \dots, H^{n-1}X)$, donc si tous ces vecteurs sont nuls, il en est de même de tous les H^kX pour tout $k \in \mathbb{N}$.

IV.4. D'après la question précédente, on est déjà sûr que G est symétrique et positive.
D'autre part, l'équivalence entre i. et ii. est évidente puisque les deux conditions signifient que $< U, C^*U, \dots, (C^*)^{n-1}U >^\perp = \{0\}$.
Remarquons enfin que, pour deux vecteurs Y et Z de $\mathbb{R}^n$, on a $(Y \mid Z) = (Z \mid Y) = Z^*Y$.
De ce fait, la matrice UU^* étant positive, en utilisant **I.A**.5., on a les équivalences

$$\begin{aligned}(X \mid U) = (CX \mid U) &= \cdots = (C^{n-1}X \mid U) = 0 \iff U^*X = U^*CX = \cdots = U^*C^{n-1}X = 0\\ &\iff UU^*X = UU^*CX = \cdots = UU^*C^{n-1}X = 0 \iff X \in \operatorname{Ker} G\end{aligned}$$

il en ressort clairement que i. $\iff \operatorname{Ker} G = 0$, ce qui correspond à G définie positive (puisqu'on sait que $G \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$).

IV.5.a. On sait déjà que $\Omega \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$. Soit $X \in \operatorname{Ker}\Omega$, on a donc d'après **IV**.3.b., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^kX \in \operatorname{Ker} E_nE_n^*$, et d'après **I.A**.5., $\forall k$, $E_n^*C^kX = (C^kX \mid E_n) = 0$. Si $X^* = (x_1, \dots, x_n)$, puisque $(X \mid E_n) = 0$, c'est que $x_n = 0$. Puis on a $(CX)^* = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$, donc de $(CX \mid E_n) = 0$ on déduit $x_{n-1} = 0$. De proche en proche, ou par une récurrence immédiate, on en déduit que tous les x_i sont nuls donc $X = 0$ et donc $\operatorname{Ker}\Omega = \{0\}$. Ω est donc bien définie positive

IV.5.b. D'après la question **IV**.4. on peut donc affirmer que $(E_n, C^*E_n, \dots, (C^*)^{n-1}E_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et donc il existe un unique n-uple de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ tel que $U = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (C^*)^k E_n$. Si Q est le polynôme de degré $\leqslant 1$ défini par $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T^k$, on peut donc écrire que $U = Q(C^*)E_n = (Q(C))^*E_n$.
Pour obtenir l'expression de G, on peut reporter cette expression de U dans la série définissant G, et on peut aussi vérifier que l'expression proposée correspond à une solution donc est la solution de l'équation $G - C^*GC = UU^*$. Dans les deux cas, on utilisera que $Q(C)$ commute avec C ou C^k et que $(Q(C))^*$ commute avec C^* ou $(C^*)^k$.

IV.5.c. On utilise le résultat de **I.A**.6 (dans les deux sens).
Supposons que $H = G - C^*GC$ est symétrique positive : il existe n vecteurs $(U_1, \dots, U_n)$ tels que $H = \sum_{i=1}^{n} U_iU_i^*$.

Mais à chacun de ces vecteurs U_i correspond un unique polynôme Q_i de degré $\leqslant n-1$ tel que l'unique solution de $X - C^*XC = U_iU_i^*$ est $G_i = (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$. Il est clair que $\sum_{i=1}^{n} G_i$ est solution de $X - C^*XC = H$, et par unicité de cette solution, $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$.

Réciproquement, si $G = \sum_{i=1}^{n}(Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$, on pose $G_i = (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C)$ et $U_i = (Q_i(C))^*E_n$, et on peut remonter les calculs : on obtient facilement que G_i est la solution de $X - C^*XC = U_iU_i^*$, et par linéarité de ϕ, G est tel que $G - C^*GC = \sum_{i=1}^{n} U_iU_i^*$, donc $G - C^*GC$ est symétrique positive.

V.

V.A.

V.A.1. D'après ce qu'on a vu dans la partie **II.** on sait construire une matrice M triangulaire inférieure dont les valeurs propres sont imposées dans $[-1, 1]$, et qui est dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$. Si on impose en plus que toutes ses valeurs propres soient les racines de P avec leur ordre de multiplicité, elles seront dans $]-1, 1[$, et le rayon spectral de M est alors plus petit que 1 : on construit ainsi une matrice $M \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ dont le polynôme caractéristique est P.
Pour un espace euclidien quelconque, il suffit de fixer une base orthonormée, et d'utiliser l'isomorphisme d'espace euclidien entre E et $\mathbb{R}^n$ que définit le choix de cette base : il suffit donc de prendre l'endomorphisme f dont la matrice dans cette base est la matrice M qu'on vient de construire. Son polynôme caractéristique est égal à celui de M et on a bien $\chi_f = P$.

V.A.2.a. On a vu que Ω est symétrique définie positive. On sait qu'il existe une matrice R inversible telle que $\Omega = R^*R$, et si $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ est la base définie à partir d'une base orthonormale $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ par sa matrice de passage R, (R est la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à ν), cette dernière égalité exprime précisément que $\Omega = G(\nu_1, \dots, \nu_n)$.

V.A.2.b. Le calcul de **III.C.2.a.** est toujours valable, et montre que si f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ est C, on a $C^*\Omega C = G(f(\nu_1), \dots, f(\nu_n))$. De l'égalité $\Omega - C^*\Omega C = E_nE_n^*$, on peut déduire que pour tous i, j on a $(\nu_i \mid \nu_j) - (f(\nu_i \mid f(\nu_j)) = 0$ sauf pour $i = j = n$: dans ce cas, on a $\|\nu_n\|^2 - \|f(\nu_n)\|^2 = 1$.
Soit $x = \lambda_1\nu_1 + \cdots + \lambda_n\nu_n$.
Matriciellement, si X représente les coordonnées de x dans la base orthonormale $\mathbf{e}$ de E dont on est parti, on peut écrire $X = R\Lambda$, avec $\Lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a $\|x\|^2 = \|X\|^2 = X^*X = \Lambda^*R^*R\Lambda = \Lambda^*\Omega\Lambda$. De même, puisque la matrice de f dans la base ν est C, les coordonnées de $f(x)$ dans la base ν sont $C\Lambda$ et dans la base $\mathbf{e}$ $f(x)$ a pour coordonnées $RC\Lambda$, donc $\|f(x)\|^2 = \Lambda^*C^*\Omega C\Lambda$.
On en déduit que pour tout $x \in E$, de coordonnées Λ dans la base ν,

$$\|x\|^2 - \|f(x)\|^2 = \Lambda^*(\Omega - C^*\Omega C)\Lambda = \Lambda^*E_nE_n^*\Lambda = \lambda_n^2$$

On peut en déduire que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout x, donc $\|f\| \leqslant 1$ et $f \in \mathscr{B}(E)$.
D'autre part, $\rho(f) < 1$ par construction.
Il reste à vérifier que $\mathrm{rg}(\mathrm{id} - f^*f) \leqslant 1$, ce qui est clair puisque la restriction de f à l'hyperplan $< \nu_1, \dots, \nu_{n-1} >$ est clairement une isométrie d'après le calcul qu'on vient de faire, donc cet hyperplan est inclus dans $E_f = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f^*f)$.

On a bien construit un endomorphisme de E de polynôme caractéristique P, et qui est dans $\mathscr{C}_0(E)$.

V.A.3. i.$\Longrightarrow$ii.$\Longrightarrow$iii. sont des implications évidentes (des endomorphismes semblables ont même polynôme caractéristique). La seule chose à vérifier est l'implication iii.$\Longrightarrow$i.
Or si f et g ont même polynôme caractéristique P, et ce polynôme correspond à la même matrice compagnon C. L'étude du **III.C**. permet de construire pour f une base ν et une matrice Ω, pour g une base ν' et une matrice Ω', qui vérifient toutes deux $\Omega - C^*\Omega C = \Omega' - C^*\Omega' C = E_n E_n^*$, donc $\Omega = \Omega'$. Les bases ν et ν' ont donc même matrice de Gram et on sait que cette propriété caractérise les bases isométriques. Il existe donc une isométrie $r \in \mathscr{O}(E)$ telle que $r(\nu) = \nu'$ et on s'aperçoit en comparant leurs matrices dans la base ν' que $g = rfr^{-1}$.

V.B.

V.B.1.a. Puisque $P(g) = 0$, on a $g^n = a_0 + a_1 g + \cdots + a_{n-1} g^{n-1}$ donc si $g(x) = x' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i g^{i-1}(u)$ si on pose $X'^* = (x'_1, \ldots, x'_n)$, alors $X' = CX$. Si U est la matrice formée par les coordonnées des vecteurs $(u, g(u), \ldots, g^{n-1}(u))$ dans une base $\mathbf{e}$ orthonormale de E, (lorsque U est inversible, U est la matrice de passage entre $\mathbf{e}$ et $(u, g(u), \ldots, g^{n-1}(u))$ qui est alors une base, mais rien ne permet d'affirmer que U est inversible, ni que $(u, g(u), \ldots, g^{n-1}(u))$ est une base !), les coordonnées de x dans $\mathbf{e}$ sont UX, celles de $x' = g(x)$ sont $UX' = UCX$; par une récurrence immédiate, et de la même façon, les coordonnées de $g^i(x)$ sont donc UC^iX. D'autre part, on a $G = U^*U$, par définition.
Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[T]$, on a $Q(g) = \widetilde{Q}(g)$, $\widetilde{Q}$ étant le reste de la division euclidienne de Q par P, et c'est donc un polynôme de degré $\leqslant n-1$. On peut écrire $Q(g) = \widetilde{Q}(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g^k$.
Remarquons que de la même façon, on a pour les mêmes coefficients α_k, et pour la même raison $Q(C) = \widetilde{Q}(C) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k C^k$.
On est maintenant armé pour calculer $\|Q(g)(x)\|^2$

$$\begin{aligned}\|Q(g)(x)\|^2 &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g^k(x)\right\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U C^k X\right\|^2 = \|U\widetilde{Q}(C)X\|^2 = \|UQ(C)X\|^2 \\ &= (UQ(C)X)^*(UQ(C)X) = (Q(C)X)^*U^*U(Q(C)X) = (Q(C)X)^*G\,(Q(C)X)\end{aligned}$$

V.B.1.b. En appliquant la formule précédente pour $Q = T$, on obtient $\|g(x)\|^2 = X^*C^*GCX$, et encore plus simplement, pour $Q = 1$, on obtient $\|x\|^2 = X^*GX$. On étudie le signe de $X^*(G - C^*GC)X$. on a

$$X^*(G - C^*GC)X = X^*GX - X^*C^*GCX = \|x\|^2 - \|g(x)\|^2$$

Or par hypothèse, on a $\|g\| \leqslant 1$ donc cette dernière quantité est toujours positive, et $G - C^*GC$ est bien positive (il est évident qu'elle est symétrique).

V.B.1.c.

D'après **V.B**.1.a, puisque $u = 1\,u + 0\,g(u) + \cdots + 0\,g^{n-1}(u)$, pour $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = E_1$, on a :

pour tout $Q \in \mathbb{R}[T]$, on a $\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)U)^* G\,(Q(C)U)$,
c'est-à-dire (*) $\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)E_1)^* G\,(Q(C)E_1)$.
On a vu en **V.B**.1.b que $G - C^*GC \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$, donc d'après **IV**.5.c, il existe n polynômes $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathbb{R}[T]$ tels que $G = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\, \Omega\, Q_i(C)$.

Donc on a

$$\begin{aligned}
\|Q(g)(u)\|^2 &= (Q(C)E_1)^* \left(\sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\, \Omega\, Q_i(C) \right) (Q(C)E_1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (Q(C)E_1)^*\, (Q_i(C))^*\, \Omega\, Q_i(C)(Q(C)E_1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C)\, Q(C)\, E_1)^*\, \Omega\, Q_i(C)\, Q(C)\, E_1) \\
(**) \quad \|Q(g)(u)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} ((Q_i.Q)(C)\, E_1)^*\, \Omega\, (Q_i.Q)(C)\, E_1)
\end{aligned}$$

Or la matrice Ω est (par définition, voir **IV**.5) l'unique matrice vérifiant $\Omega - C^*\Omega\, C = E_n E_n^*$.
D'après la partie **III.C**, Ω est donc la matrice de Gram d'une base $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) = \big(\nu_1, f(\nu_1), \ldots, f^{n-1}(\nu_n)\big)$, où ν_1 est un vecteur de E qui vérifie $\begin{cases} \|f^{n-1}(\nu_1)\| = \|\nu_1\| \\ \|\nu_1\|^2 - \|f^n(\nu_1)\|^2 = 1, \end{cases}$ (et dans laquelle la matrice de f est justement C.)
On peut à nouveau appliquer **V.B**.1.a à ce vecteur ν_1, et à l'endomorphisme f, comme on l'a fait au début de cette question : la formule (*) qu'on a obtenue avec u et g quelconques (on a bien, bien sûr $P(f) = 0$, puisque P est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de f) :
$\|Q(g)(u)\|^2 = (Q(C)E_1)^* G\,(Q(C)E_1)$ s'écrit ici (puisqu'on a $\Omega = G(\nu_1, f(\nu_1), \ldots, f^{n-1}(\nu_1)))$

$$\forall Q \in \mathbb{R}[T], \quad \|Q(f)(\nu_1)\|^2 = (Q(C)E_1)^* \Omega\,(Q(C)E_1).$$

Appliquons ceci en particulier pour chaque polynôme $Q_i.Q = Q.Q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$(***) \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad ((Q_i.Q)(C)\, E_1)^*\, \Omega\, (Q_i.Q)(C)\, E_1) = \|Q.Q_i(f)(\nu_1)\|^2 = \|Q(f)\big(Q_i(f)(\nu_1)\big)\|^2$$

Il suffit alors de poser $u_i = Q_i(f)(\nu_1)$ (ces vecteurs sont indépendants de Q) pour obtenir, à partir des relations (**) et (***) :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[T], \quad \|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)(u_i)\|^2.$$

V.B.2. Soit $Q \in \mathbb{R}[T]$; on choisit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|Q(g)\| = \|Q(g)(u)\|$ (c'est toujours possible par compacité de la boule unité de E, qui est de dimension finie).

D'après la question précédente **V.B**.1.c, il existe $u_1, \ldots, u_n \in E$ tels que

$$(*) \quad \forall S \in \mathbb{R}[T], \quad \|S(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|S(f)(u_i)\|^2.$$

En particulier, en appliquant ceci au polynôme Q, on a

$$\|Q(g)\|^2 = \|Q(g)(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)(u_i)\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Q(f)\|^2 \, \|u_i\|^2 = \|Q(f)\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2;$$

Une dernière astuce consiste à appliquer (*) avec le polynôme constant $S = 1$ (et donc $S(g) = S(f) = \mathrm{id}_E$) :

On a donc $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$, et en reportant dans ce qu'on vient d'obtenir

$\|Q(g)\|^2 \leqslant \|Q(f)\|^2 \, \|u\|^2 = \|Q(f)\|^2$ puisque $\|u\| = 1$.

On a bien prouvé

$$\|Q(g)\| \leqslant \|Q(f)\|.$$